3) (F) : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+16=0 \Leftrightarrow$
$(x^2-4x)+(y^2+2y)+(z^2-6z)=-16 \Leftrightarrow$
$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=-2$
$(F)=\emptyset$

Ex 18 :

(S) : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

O,A,B et C appartiennent à (S)$\Rightarrow$

$$\begin{cases} d=0 \\ 1+1+1+a+b+c+d=0 \\ 4+2a+d=0 \\ 1+4+4+a-2b+2c+d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ a+b+c+d=-3 \\ 2a+d=-4 \\ a-2b+2c+d=-9 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow d=0$; $a=-2$; $b=5/4$ et $c=-9/4$

(S) : $x^2+y^2+z^2-2x+5/4.y-9/4.z=0$

Ex 19 :

1) A(1,7,-1) P : $x+y+z=0$
(S) est de rayon $R=d(A,P)=\frac{|7|}{\sqrt{3}}=\frac{7}{\sqrt{3}}$
$\Rightarrow$(S) : $(x-1)^2+(y-7)^2+(z+1)^2=\frac{49}{3}$

2) A(0,2,3) P : $x+y+z=0$
$R=d(A,P)=\frac{|-2+3+5|}{\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$
$\Rightarrow$(S) : $x^2+(y-2)^2+(z-3)^2=12$

2) A(5,3,1) P : $3x-2y-z+7=0$
$R=d(A,P)=\frac{|15-6-1+7|}{\sqrt{14}}=\frac{15}{\sqrt{14}}$
$\Rightarrow$(S) : $(x-5)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=\frac{225}{14}$

Ex 20 :

$\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P

$\Rightarrow$P : $y-3z+d=0$

$A(1,4,-5)\epsilon P \Rightarrow 4-3\times(-5)+d=0 \Rightarrow d=-19$

Cclusion P : $y-3z-19=0$

Ex 21 :

1) $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ vecteur normal à(OAB)

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ vecteur normal à(ABC)

$(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0+0+0=0 \Rightarrow$

(OAB)$\perp$ (ABC)

2) Désignons par P,Q et R les plans médiateurs respectifs de [OA],[OB] et [OC]

$*\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P$\Rightarrow$

P : $2x+d=0$

$I=O*A(1,0,0)\epsilon P \Rightarrow 2+d=0 \Rightarrow d=-2$

P: $2x-2=0 \Leftrightarrow$ P: $x=1$

$*\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q$\Rightarrow$

Q : $x+y+d=0$

$J=O*B(1/2,1/2,0)\epsilon Q \Rightarrow 1+d=0 \Rightarrow d=-1$

Q: $x+y-1=0$

$*M(x,y,z)\epsilon R \Leftrightarrow OM=OC$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$